Principio de Incertidumbre de Heisenberg

UNIVERSIDAD DE MURCIA
Miguel Albaladejo Serrano
Licenciatura en Física
mas4@alu.um.es

Resumen

Se demuestra el principio de incertidumbre de Heisenberg para dos observables $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ cuyo conmutador es $[A, B] = C$.

Supongamos que tenemos dos observables, $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$, cuyo conmutador es:

$$[\widehat{\mathbf{A}}, \widehat{\mathbf{B}}] = C \tag{1}$$

Si tenemos un vector $|\Psi\rangle$ normalizado, podemos hacer actuar un operador (que nunca podrá ser un observable) de la forma $\mathcal{A} + \imath\mathcal{B}$, obteniendo $|\varphi\rangle = (A + i\lambda B)\,|\varphi\rangle$. Su norma habrá de ser mayor o igual que cero, $\langle\varphi|\varphi\rangle$:

$$\langle\varphi|\varphi\rangle = \langle\Psi|\, A^2 + \lambda^2 B^2 + i\lambda[A, B]\,|\Psi\rangle = \lambda^2\langle B^2\rangle + iC\lambda + \langle A^2\rangle \geq 0 \tag{2}$$

Por tanto el discriminante de la anterior ecuación en el caso de igualdad ha de ser menor o igual que cero, por lo que:

$$\langle A^2\rangle\langle B^2\rangle \geq \frac{|C|^2}{4} \tag{3}$$

Si ahora definimos dos operadores a partir de los anteriores de esta manera:

$$A' = A - \langle\Psi|\, A\,|\Psi\rangle \tag{4a}$$
$$B' = B - \langle\Psi|\, B\,|\Psi\rangle \tag{4b}$$

Se cumplirá la siguiente relación de conmutación, pues los dos últimos términos de las definiciones son constantes:

$$[A', B'] = C \tag{5}$$

Por tanto también se cumplirá que:

$$\langle A'^2 \rangle \langle B'^2 \rangle \geq \frac{|C|^2}{4} \tag{6}$$

Pero si ahora calculamos, según su definición, $\langle A'^2 \rangle$ y $\langle B'^2 \rangle$, obtendremos:

$$\langle A'^2 \rangle = \langle \Psi | A'^2 | \Psi \rangle = \langle A^2 \rangle - \langle A \rangle^2 = (\Delta A)^2 \tag{7a}$$
$$\langle B'^2 \rangle = \langle \Psi | B'^2 | \Psi \rangle = \langle B^2 \rangle - \langle B \rangle^2 = (\Delta B)^2 \tag{7b}$$

Y, por tanto, se tiene que:

$$\Delta A \cdot \Delta B \geq \frac{|C|}{2} \tag{8}$$

Este es el *principio de incertidumbre* o *incerteza* de Heisenberg. Es importante notar que, aunque en el desarrollo habitual se parte de la ecuación de Schrödinger y del formalismo de onda, y se llega a demostrar 8, el desarrollo puede ser invertido y, postulando 8, alcanzar la formulación de funciones de onda y demostrar la ecuación de Schrödinger.