



## FISIMUR

Con la colaboración de Johannes

### Resumen

Estos problemas nacen de la necesidad de poner en juego una serie de herramientas matemáticas aplicadas a problemas de Física. Todos sabemos que una parte de esta materia requiere el uso hábil de cierto tipo de utensilios y pasadizos matemáticos, cuya práctica da lugar a una mejor adaptación del alumno a aquello que debe utilizar. En unas ocasiones serán ecuaciones diferenciales, en otras análisis de gráficas, polinomios de Taylor, etc... Para superar el miedo a estas herramientas, y que el alumno pueda centrarse en el problema físico, desarrollamos aquí una serie de problemas, para pensar y reflexionar, pero al mismo tiempo, para calcular y comprender. Al principio de cada problema se exponen los conocimientos mínimos indispensables. Podéis enviar vuestras soluciones al Jedi Johannes, arriba a la derecha.

4 - 11 - 2006

## 2. Relatividad Especial

*Conocimientos mínimos indispensables: Mecánica Relativista, Análisis Matemático (Taylor, integración), Leyes de Newton (puede que algún que otro detalle más).*

Siguiendo con la relatividad especial, nos preocupamos ahora del choque de dos partículas. Queremos obtener desde el sistema laboratorio, las relaciones que expresan los ángulos de emergencia con las energías de las partículas. Considérese que anclamos nuestro sistema en una de las partículas, y realícese el problema sin pasar por el sistema centro de masas. Invertir después estas relaciones, para obtener las energías finales en función de los ángulos de emergencia (para ambas partículas de masas no nulas). Para la partícula que impacta en nuestro sistema de referencia laboratorio, obténgase la relación del efecto Compton, haciendo para ello nula la masa de dicha partícula. En este problema no ha de considerarse  $c = 1$ .

Este problema es sencillo, pese a la longitud del enunciado.

*Solución.-*

La primera parte de nuestro problema aparece en multitud de textos, siendo *Teoría clásica de campos* la referencia principal (aunque existen muchas otras). Nuestro enfoque es completamente paralelo al de Landau, y sólo completaremos, con la segunda parte del problema, lo expuesto en el libro citado.

Para analizar el choque de dos partículas, desde el punto de vista relativista, situamos nuestro sistema de referencia en una de las partículas. Esto implica que dicha partícula estará en reposo respecto de ese sistema.

Matemáticamente, empleamos el formalismo cuadridimensional con la métrica de signatura +2. Los cuadvectores, en su forma general, son:

$$\mathbb{P} = \left( \frac{E}{c}, \mathbf{p} \right); \quad \mathbf{p} = \frac{m\mathbf{v}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = m\mathbf{v}\gamma \quad (1)$$

Las relaciones habituales, según la métrica elegida,

$$|\mathbb{P}| = p^2 - \frac{E^2}{c^2} = -m^2c^2; \quad E^2 = c^2p^2 + m^2c^4 \quad (2)$$

En el marco de la Física Teórica pueden escogerse unidades naturales, y hacer  $c = 1$ . Por otra parte, para partículas de masa nula, debe recordarse la relación,

$$p = \frac{E}{c} \quad (3)$$

Una vez que ya tenemos presentadas las herramientas, impongamos las condiciones físicas a nuestro sistema (observando que no es completamente necesario establecer un formalismo cuadridimensional y es posible tratarlo mediante conceptos matemáticos más sencillos). En primer lugar, como en todo choque de partículas, partimos de la conservación del momento. Desde el sistema de referencia laboratorio (solidario con una de las partículas)

$$\mathbb{P}_{i_1} + \mathbb{P}_{i_2} = \mathbb{P}_{f_1} + \mathbb{P}_{f_2} \quad (4)$$

Despejemos  $\mathbb{P}_{f_1}$  y  $\mathbb{P}_{f_2}$ , y hallemos su cuadrado,

$$\mathbb{P}_{f_2}^2 = \mathbb{P}_{i_1}^2 + \mathbb{P}_{i_2}^2 + \mathbb{P}_{f_1}^2 + 2\mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{i_2} - 2\mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{f_1} - 2\mathbb{P}_{i_2}\mathbb{P}_{f_1} \quad (5)$$

que nos lleva a

$$-m_1^2c^2 + \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{i_2} - \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{f_1} - \mathbb{P}_{i_2}\mathbb{P}_{f_1} = 0 \quad (6)$$

De forma semejante, realizando exactamente el mismo procedimiento pero para  $\mathbb{P}_{f_1}$

$$-m_2^2c^2 + \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{i_2} - \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{f_2} - \mathbb{P}_{i_2}\mathbb{P}_{f_2} = 0 \quad (7)$$

Consideremos que, en nuestro caso, el sistema laboratorio es solidario a la partícula 2. Como ya hemos dicho, esto implica que  $\mathbf{p} = 0$  y  $E_2 = m_2c^2$ . Ahora debemos averiguar cuál es el valor de los productos cruzados de los cuadrimomentos. Para poder hallarlo, debemos considerar que una vez producido el choque, las partículas se desvían respecto de la dirección del haz incidente un ángulo. Este ángulo lo llamamos  $\theta_1$ , para la partícula incidente, y  $\theta_2$  para la partícula que estaba en reposo. Así

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{i_2} &= \left( \frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \left( \frac{E_2}{c}, 0 \right) = -E_1m_2 \\ \mathbb{P}_{i_1}\mathbb{P}_{f_1} &= \left( \frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \left( \frac{E'_1}{c}, \mathbf{p}'_1 \right) = -\frac{E_1E'_1}{c^2} + p_1p'_1 \cos \theta_1 \\ \mathbb{P}_{i_2}\mathbb{P}_{f_1} &= \left( \frac{E'_1}{c}, \mathbf{p}'_1 \right) \left( \frac{E_2}{c}, 0 \right) = -E'_1m_2 \end{aligned} \quad (8)$$

Llevando estas relaciones a (6) y despejando  $\cos \theta_1$ , obtenemos,

$$\cos \theta_1 = \frac{-(m_1c^2 + E_1m_2) + E'_2(E_1/c^2 + m_2)}{p_1p'_1} \quad (9)$$

Si la partícula incidente tuviera masa nula,

$$\cos \theta_1 = \frac{-E_1m_2 + E'_2(E_1/c^2 + m_2)}{E_1E'_1/c^2} \Rightarrow E'_1 = E_1 \left( 1 - \frac{E_1}{m_2c^2} (1 - \cos \theta_1) \right)^{-1} \quad (10)$$

Y, a partir de las relaciones  $E = h\nu = hc/\lambda$ , tenemos,

$$\lambda'_1 = \lambda_1 \left( 1 - \frac{h}{\lambda m_2 c} (1 - \cos \theta_1) \right) \quad (11)$$

Esto es,

$$\lambda'_1 - \lambda_1 = \frac{h}{m_2 c} (\cos \theta_1 - 1) \quad (12)$$

que es la fórmula que siempre se obtiene en el efecto Compton.

Obtengamos ahora el valor de  $\cos \theta_2$  del mismo modo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{i_1} \mathbb{P}_{i_2} &= \left( \frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \left( \frac{E_2}{c}, 0 \right) = -E_1 m_2 \\ \mathbb{P}_{i_1} \mathbb{P}_{f_2} &= \left( \frac{E_1}{c}, \mathbf{p}_1 \right) \left( \frac{E'_2}{c}, \mathbf{p}'_2 \right) = -\frac{E_1 E'_2}{c^2} + p_1 p'_2 \cos \theta_2 \\ \mathbb{P}_{i_2} \mathbb{P}_{f_2} &= \left( \frac{E'_2}{c}, \mathbf{p}'_2 \right) \left( \frac{E_2}{c}, 0 \right) = -\frac{E_2 E'_2}{c^2} \end{aligned} \quad (13)$$

de donde, empleando (7),

$$\cos \theta_2 = \frac{-(m_2^2 c^2 + E_1 m_2) + E'_2 (E_1/c^2 + m_2)}{p_1 p'_2} = \frac{(E_1/c + m_2 c) (E'_2/c - m_2 c)}{p_1 p'_2} \quad (14)$$

Cuando la masa de la partícula incidente es nula, las energías en función de los ángulos pueden obtenerse muy fácilmente. Pero cuando esto no es así, las operaciones suelen complicarse un poco. Antes hemos obtenido el efecto Compton de una forma muy sencilla pasando por la obtención de la energía de la partícula incidente. Esta expresión también era muy sencilla, gracias a que la partícula carecía de masa.

Cuando ambas partículas tienen masa el caso más sencillo de obtener es el que relaciona las energías con el ángulo  $\theta_2$ . De hecho, es muy fácil despejar de (14)  $E'_2$  en función de  $\cos \theta_2$ . Para ello

$$\cos^2 \theta_2 = \frac{(E_1/c + m_2 c)^2 (E'_2/c - m_2 c)^2}{(E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2) (E_2^2/c^2 - m_2^2 c^2)} = \left( \frac{(E_1/c - m_2 c)^2}{E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2} \right) \left( \frac{E'_2/c - m_2 c}{E_2^2/c^2 - m_2^2 c^2} \right) \quad (15)$$

Y despejando,

$$E'_2 = m_2 c^2 \frac{(E_1/c - m_2 c)^2 + (E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2) \cos^2 \theta_2}{(E_1/c - m_2 c)^2 - (E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2) \cos^2 \theta_2} \quad (16)$$

Pero para obtener  $E'_1$  en función de  $\theta_1$ , tenemos un asunto más complicado. Tendremos que resolver una ecuación de segundo grado. Aquí daremos sólo el resultado (que era lo que le faltaba a Landau), pues es un procedimiento que no aporta nada conceptualmente. El comienzo sería el siguiente

$$\cos \theta_1 = \frac{-(E_1/c + m_2 c) + E'_1 (E'_2/c^2 - m_2)}{\sqrt{(E_1^2/c^2 - m_1^2 c^2) (E_1'^2/c^2 - m_1^2 c^2)}} \quad (17)$$

y de aquí obtenemos,

$$\begin{aligned}
 E'_1 = & \left( (m_1 c^2 + E_1 m_2) (E_1/c^2 + m_2) + \cos \theta_1 \sqrt{E_1^2/c^2 - m_1^2/c^2} \right. \\
 & \cdot \sqrt{E_1^2 m_2^2/c^2 + m_1 \left[ m_1 \left( c^2 + (E_1/c + m_2 c)^2 - m_1^2 \cos^2 \theta_1/c^2 \right) + 2m_2 E_1 \right]} \Big) / \\
 & / \left( (E_1/c^2 + m_2)^2 - (E_1^2/c^2 + m_2^2 c^2) \cos^2 \theta_1/c^2 \right)
 \end{aligned} \tag{18}$$

Si hacemos  $m_1 = 0$ , volvemos a obtener (10).