

Examen final de problemas de Mecánica Cuántica.

- 1.- Sea $|1/2, m; \alpha\rangle$ el vector correspondiente al estado de un sistema de momento angular total $1/2$ y tercera componente m . Supóngase conocido el elemento de matriz $\langle 1/2, 1/2 | z | 1/2, 1/2 \rangle = A$.
- Calcular $\langle 1/2, -1/2 | z | 1/2, 1/2 \rangle$ y $\langle 1/2, -1/2 | z | 1/2, -1/2 \rangle$
 - Calcular $\langle 1/2, -1/2 | x | 1/2, 1/2 \rangle$
 - Si suponemos que el estado $|1/2, m; \alpha\rangle$ es autoestado de paridad, ¿cuánto vale A ?
 - Supóngase que el estado anterior no es invariante bajo paridad sino que viene dado por una combinación lineal de estados $|1/2, m; \ell s n\rangle$, donde ℓ es el momento angular, s es el spin y n está relacionado con la función de onda radial.

$$|1/2, m; \alpha\rangle = \sum_{\ell} C_{\ell} |1/2, m; \ell s n\rangle,$$

Tomemos el caso $s = 1/2$.

- ¿Qué valores puede tomar ℓ ?
 - Demostrar que dicho estado no es en general invariante bajo paridad.
 - Demostrar que aún así, suponiendo invarianza bajo inversión temporal, $A = 0$.
- 2.- Considerar el potencial Gaussiano $V = V_0 e^{-r^2/a^2}$, con V_0 una constante.
- Determinar qué relación deben de satisfacer los valores de V_0 y a para que la aproximación de Born sea aplicable.
 - En el límite de baja energía la amplitud de colisión se puede desarrollar en serie de potencias de q^2 : $f(k, \theta) = a_0 + a_2 q^2 + \dots$. Obtener dentro de la aproximación de Born los coeficientes a_0 y a_2 para el potencial dado.

Nota:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

3.- Sea el Hamiltoniano de un sistema de partículas de spin 1/2:

$$H = \frac{\vec{p}^2}{2m} - \vec{M} \cdot \vec{B},$$

$$\vec{M} = \frac{e}{2m} \vec{\ell} + \frac{e}{2m} g_s \vec{S},$$

donde ℓ es el momento angular orbital, \vec{S} es el spin y g_s una constante.

- a) Justificar que $\vec{\ell}^2$, ℓ_z y S_z conmutan con el Hamiltoniano anterior si \vec{B} es paralelo al eje z .

En lo que sigue consideraremos la base de estados $|\ell \ell_z S_z\rangle$.

- b) Determinar la evolución temporal de la polarización del haz $\vec{P} = \langle 2\vec{S}/\hbar \rangle$ en la imagen de Heisenberg siendo $\vec{B} \parallel \hat{z}$.
- c) Haciendo uso de la imagen de Dirac, considerando B como pequeño, determinar a primer orden en la serie de Dyson la probabilidad de la transición de un estado $|\ell \ell_z + 1/2\rangle$ a $|\ell \ell_z - 1/2\rangle$ cuando $\vec{B} \parallel \hat{x}$.
- d) Obtener el resultado anterior de forma exacta.

10 de febrero de 2003

Examen final de teoría de Mecánica Cuántica.

Elegir tres de las cuatro preguntas:

1. Definición general de un proceso de medida. Demostrar si es posible o no transitar desde un estado puro a un estado mezcla con la evolución temporal dada por la mecánica cuántica.
2. Demostrar la relación de incertidumbre de dos operadores A y B :

$$\langle (\Delta A)^2 (\Delta B)^2 \rangle \geq \frac{1}{4} | \langle [A, B] \rangle |^2.$$

3. Sea Θ el operador de inversión temporal. Determinar su actuación sobre los estados de momento angular definido $|jm\rangle$, así como la actuación de Θ . Explicar en qué consiste la degeneración de Kramers.
4. Definición de la sección eficaz diferencial y total. Expresar la sección eficaz diferencial en función de la amplitud de colisión $f(k, \cos \theta)$